Über die Verwirklichung des Calculemus-Gedankens in der Aussagenlogik

Peter Jaenecke

Straubenhardt

Car alors

raisonner et calculer

sera la même chose

VIII. Internationaler Leibniz-Kongreß

Hannover 24. – 27. Juli 2006

Überblick

1 Charakterisierung des Calculemus-Gedankens

2 Arithmetische Darstellung der Aussagenlogik

3 Schlußfolgerungen

4 Verwirklichung des Calculemus-Gedankens durch den Schlußfolgerungsansatz

5 Anmerkung zum Münchhausen Trilemma

6 Anmerkung zur Unentscheidbarkeit und Unvollständigkeit

7 Schlußbemerkung

1. Charakterisierung des Calculemus-Gedankens

Calculemus-Gedanken von Leibniz

»Wenn es möglich wäre, Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ebenso gradlinig (klar) und stringent (präzise) auszudrücken wie die Arithmetik die Zahlen oder wie die Geometrie die Figuren darstellt, dann könnten alle Dinge, *soweit sie dem Schlußfolgern unterworfen sind*, in der gleichen Weise behandelt werden wie es in der Arithmetik und Geometrie getan wird.«

Calculemus-Gedanken von Leibniz

»Wenn es möglich wäre, Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ebenso gradlinig (klar) und stringent (präzise) auszudrücken wie die Arithmetik die Zahlen oder wie die Geometrie die Figuren darstellt, dann könnten alle Dinge, *soweit sie dem Schlußfolgern unterworfen sind*, in der gleichen Weise behandelt werden wie es in der Arithmetik und Geometrie getan wird.«

»Zudem würde man jeden von dem überzeugen, was man gefunden oder erschlossen hätte, da es leicht sein würde, die Rechnung zu prüfen ... und wenn jemand an dem, was ich vorgebracht haben würde, zweifelte, würde ich zu ihm sagen: "Rechnen wir".«

Calculemus-Gedanken von Leibniz

»Wenn es möglich wäre, Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ebenso gradlinig (klar) und stringent (präzise) auszudrücken wie die Arithmetik die Zahlen oder wie die Geometrie die Figuren darstellt, dann könnten alle Dinge, *soweit sie dem Schlußfolgern unterworfen sind*, in der gleichen Weise behandelt werden wie es in der Arithmetik und Geometrie getan wird.«

»Zudem würde man jeden von dem überzeugen, was man gefunden oder erschlossen hätte, da es leicht sein würde, die Rechnung zu prüfen ... und wenn jemand an dem, was ich vorgebracht haben würde, zweifelte, würde ich zu ihm sagen: "Rechnen wir".«

»Das einzige Mittel, unsere Schlußfolgerungen zu verbessern, ist, sie ebenso anschaulich zu machen wie es die der Mathematiker sind, derart, daß man seinen Irrtum mit den Augen findet und wenn es Streitigkeiten ... Gibt, man nur zu sagen braucht „rechnen wir“ ..., um zu sehen, wer recht hat.«

Calculemus-Gedanken von Leibniz

»Wenn es möglich wäre, Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ebenso gradlinig (klar) und stringent (präzise) auszudrücken wie die Arithmetik die Zahlen oder wie die Geometrie die Figuren darstellt, dann könnten alle Dinge, *soweit sie dem Schlußfolgern unterworfen sind*, in der gleichen Weise behandelt werden wie es in der Arithmetik und Geometrie getan wird.«

»Zudem würde man jeden von dem überzeugen, was man gefunden oder erschlossen hätte, da es leicht sein würde, die Rechnung zu prüfen ... und wenn jemand an dem, was ich vorgebracht haben würde, zweifelte, würde ich zu ihm sagen: "Rechnen wir".«

»Das einzige Mittel, unsere Schlußfolgerungen zu verbessern, ist, sie ebenso anschaulich zu machen wie es die der Mathematiker sind, derart, daß man seinen Irrtum mit den Augen findet und wenn es Streitigkeiten ... Gibt, man nur zu sagen braucht „rechnen wir“ ..., um zu sehen, wer recht hat.«

»... um Kontroversen in den Gebieten auszuschließen, die vom Schlußfolgern abhängen. Denn dann wird Schließen und Rechnen dieselbe Sache sein.«

Charakteristische Merkmale des Calculemus-Gedankens

(1) Eine Darstellung für Wissen zu finden, die Rechenoperationen erlaubt (»Wenn es möglich wäre, Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ... «)

Charakteristische Merkmale des Calculemus-Gedankens

(1) Eine Darstellung für Wissen zu finden, die Rechenoperationen erlaubt (»Wenn es möglich wäre, Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ... «)

(2) Strittige Ansichten werden durch Berechnung entschieden (»... wenn jemand an dem, was ich vorgebracht haben würde, zweifelte, würde ich zu ihm sagen: "Rechnen wir".«)

Charakteristische Merkmale des Calculemus-Gedankens

(1) Eine Darstellung für Wissen zu finden, die Rechenoperationen erlaubt (»Wenn es möglich wäre, Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ... «)

(2) Strittige Ansichten werden durch Berechnung entschieden (»... wenn jemand an dem, was ich vorgebracht haben würde, zweifelte, würde ich zu ihm sagen: "Rechnen wir".«)

(3) Berechnungen beruhen auf allgemein anerkannten Regeln; wenn kein Rechenfehler nachweisbar ist, muß jeder Einsichtige das Ergebnis akzeptieren (»Zudem würde man jeden von dem überzeugen, was man gefunden oder erschlossen hätte ...«)

Charakteristische Merkmale des Calculemus-Gedankens

(1) Eine Darstellung für Wissen zu finden, die Rechenoperationen erlaubt (»Wenn es möglich wäre, Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ... «)

(2) Strittige Ansichten werden durch Berechnung entschieden (»... wenn jemand an dem, was ich vorgebracht haben würde, zweifelte, würde ich zu ihm sagen: "Rechnen wir".«)

(3) Berechnungen beruhen auf allgemein anerkannten Regeln; wenn kein Rechenfehler nachweisbar ist, muß jeder Einsichtige das Ergebnis akzeptieren (»Zudem würde man jeden von dem überzeugen, was man gefunden oder erschlossen hätte ...«)

(4) Berechnungen vereinfachen den Gedankengang und liefern so Sicherheit und Überzeugungskraft (»... da es leicht sein würde, die Rechnung zu prüfen ...«)

Charakteristische Merkmale des Calculemus-Gedankens

(1) Eine Darstellung für Wissen zu finden, die Rechenoperationen erlaubt (»Wenn es möglich wäre, Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ... «)

(2) Strittige Ansichten werden durch Berechnung entschieden (»... wenn jemand an dem, was ich vorgebracht haben würde, zweifelte, würde ich zu ihm sagen: "Rechnen wir".«)

(3) Berechnungen beruhen auf allgemein anerkannten Regeln; wenn kein Rechenfehler nachweisbar ist, muß jeder Einsichtige das Ergebnis akzeptieren (»Zudem würde man jeden von dem überzeugen, was man gefunden oder erschlossen hätte ...«)

(4) Berechnungen vereinfachen den Gedankengang und liefern so Sicherheit und Überzeugungskraft (»... da es leicht sein würde, die Rechnung zu prüfen ...«)

(5) Es sind die Schlußfolgerungen, die rechnerisch zugänglich gemacht werden sollen (»... dann wird Schließen und Rechnen dieselbe Sache sein.«)

2. Arithmetische Darstellung der Aussagenlogik

Restklassen-Arithmetik Modulo 2

Es gelten

die vertrauten Regeln der herkömmlichen Arithmetik

mit Ausnahmen von

$$p \cdot p = p$$

$$p + p = 0$$

Es gibt nur die Zahlen 0 und 1

Das Umformen von Gleichungen ist besonders einfach:

$x + a = b, \quad x + a + a = a + b, \quad x = a + b$

Beispiele für die arithmetische Darstellung aussagenlogischer Operationen

Operation	Junktorielle Darstellung	Arithmetische Darstellung
Negation	$\neg p$	$p+1$
Konjunktion	$p \wedge q$	$p\ q$
Exklusives Oder	$p \veebar q$	$p + q$
Disjunktion	$p \vee q$	$p + q + p\ q$
Implikation	$p \rightarrow q$	$p + p\ q + 1$
Äquivalenz	$p \leftrightarrow q$	$p + q + 1$
Sheffer Strich	$p \mid q$	$p\ q + 1$

Anwendung:
Lösung des aussagenlogischen Entscheidungsproblems

Gegeben ist ein aussagenlogischer Ausdruck $F(p_1, p_2, p_3, \ldots)$.

Es gilt herauszufinden, welche der drei Möglichkeiten vorliegt:

F ist wahr	F = 1	(Tautologie)
F ist falsch	F = 0	(Widerspruch)
F hängt noch von Variablen ab		(Neutralität)

"Streitfälle"

$\neg(\neg p) =_T 1 + (1 + p) = p$ (Neutralität)

$p \wedge \neg p =_T p\,(p + 1) = p + p = 0$ (Widerspruch)

$p \wedge (p \vee q) =_T p\,(p + q + p\,q) =$

$= p + p\,q + p\,q = p$ (Neutralität)

$P \rightarrow (q \rightarrow p) =_T$

$p + p(q + q\,p + 1) + 1$

$= p + p\,q + p\,q + p + 1 = 1$ (Tautologie)

$\Rightarrow$Damit sind bereits Punkt (1) – Punkt (4) des Calculemus-Gedanken erfüllt:

(1) Aussagenlogische Ausdrücke zur Darstellung von Wissen
(2) Die arithmetische Darstellung der Aussagenlogik erlaubt Berechnungen
(3) Aufgrund von anerkannten Rechenregeln muß das Rechenergebnis akzeptiert werden
(4) Sicherheit durch einfache Rechenregeln

Es fehlt noch Punkt (5):
Schließen und Rechnen zur selben Sache machen

3. Schlußfolgerungen

Schlußfolgern

als Lösen von Gleichungssystemen

Beispiel Modus ponens

1. Prämisse	$p_1 \rightarrow p_2 = w$	$p_1 + p_1 p_2 + 1 = 1$
2. Prämisse	$p_1 = w$	$p_1 = 1$

Konklusion	$p_1 = w$	$p_1 = 1$
	$p_2 = w$	$p_2 = 1$

Anspruchsvolleres Beispiel 1

$W_1:$	$[(p_1 \to p_2) \vee p_3] \to \neg p_4 = f$	$1+[(p_1+p_1p_2+1)+p_3+(p_1+p_1p_2+1)p_3]+$ $+[(p_1+p_1p_2+1)+p_3+(p_1+p_1p_2+1)p_3](p_4+1)=0$
$W_2:$	$(p_1 \vee p_2) \wedge p_3 = w$	$(p_1+p_2+p_1p_2)p_3=1$
$A:$	$\neg(p_3 \to p_2) = w$	$p_3+p_3p_2+1+1=1$
$K_1:$	$\neg p_4 = w$	$p_4=0$
$K_2:$	$p_3 = w$	$p_3=1$
$K_3:$	$p_1 = w$	$p_1=1$
$K_4:$	$\neg p_2 = w$	$p_2=0$

Anspruchsvolleres Beispiel 2

$W_1: \quad [(p_1 \to p_2) \vee p_3] \to \neg p_4 = f$

$$1 + [(p_1 + p_1 p_2 + 1) + p_3 + (p_1 + p_1 p_2 + 1) p_3] + $$
$$+ [(p_1 + p_1 p_2 + 1) + p_3 + (p_1 + p_1 p_2 + 1) p_3](p_4 + 1) = 0$$

$W_2: \quad (p_1 \vee p_2) \wedge p_3 = w \qquad (p_1 + p_2 + p_1 p_2) p_3 = 1$

$W_3: \quad [\neg(p_3 \to p_2)] \to p_5 = w \qquad p_3 + p_2 p_3 + 1 + 1 + (p_3 + p_2 p_3 + 1 + 1) p_5 + 1 = 1$

$K_1: \quad \neg p_4 = w \qquad p_4 = 0$

$K_2: \quad p_3 = w \qquad p_3 = 1$

$K_3: \quad p_1 \vee p_2 = w \qquad p_1 + p_2 + p_1 p_2 = 1$

$K_4: \quad \neg(\neg p_2 \wedge \neg p_5) = w \qquad (p_2 + 1)(p_5 + 1) = 0$

Anmerkung: Es gibt noch Lösungen der Form

0 = 0 (redundante Aussage)

0 = 1 (Widerspruch im System)

Allgemeine Schlußform

Aussagenmenge/Gleichungssystem ‚Wissensbasis‵

Aussagenmenge/Gleichungssystem ‚Annahmen‵

Aussagenmenge/Gleichungssystem ‚Konklusionen‵

4. Verwirklichung des Calculemus-Gedankens durch den Schlußfolgerungsansatz

Streitfragen werden auf Schlußfolgerungen und diese auf das Lösen eines Gleichungssystems zurückgeführt

Grundlage bei allen Streitfragen ist die allgemeine Schlußform

Wissensbasis

Annahmen (können auch fehlen)

Konklusionen

Die Streitfragen unterscheiden sich lediglich durch unterschiedliche Fragestellungen

Streitfrage 1 (Konsistenz der Wissensbasis): Die Wissensbasis W_0 ist gut/schlecht aufgebaut

Lösung: Man löst das Gleichungssystem W_0

$$\frac{W_0}{W}$$

Das Ergebnis ist wiederum ein Gleichungssystem, in dem eventuell Redundanzen („0=0") oder Widersprüche („0=1") auftreten.

Eventuelle Defizite von W_0 können so erkannt und die Streitfrage 1 entschieden werden.

Streitfrage 2 (Fragliche Folgerungen): Es wird bezweifelt, ob sich bestimmte Folgerungen aus der Wissensbasis W und vorgegeben Annahmen A ergeben.

Lösung: Man löst das Gleichungssystem W + A

W (unstrittige Wissensbasis)

A (unstrittige Annahmen)

K (Konklusion)

und untersucht, ob sich die fraglichen Folgerungen in der Konklusion K wiederfinden.

Streitfrage 3 (Begründungsproblem): Es wird bezweifelt, ob sich die Annahmen A durch die Wissensbasis W begründen lassen.

Lösung: Man löst das Gleichungssystem W + A

W (unstrittige Wissensbasis)

A (strittige Annahmen)

K (Konklusion)

und untersucht, ob K frei von Widersprüchen, d.h. frei von Gleichungen der Form „0=1" ist.

Streitfrage 4 (Rationale Analyse): Es wird der Wert der Annahmen A bezüglich der Wissensbasis W bezweifelt.

Lösung: Man löst das Gleichungssystem W + A

W (unstrittige Wissensbasis)

A (strittige Annahmen)

K (Konklusion)

und untersucht, ob in K unakzeptable Aussagen vorkommen.

Mißachtung von Streitfrage 4 hat schon zu vielen Irrtümern geführt:

Man behauptet etwas ohne die Folgen zu überprüfen, d.h. man ist sich nicht klar, daß man mit den Annahmen A stillschweigend Aussagen mitbehauptet, die in der Konklusion als

K_1 = w/f, K_2 = w/f, ...

erscheinen.

Streitfrage 4: Beispiel

$W_1(p_4)$:	$\neg p_4 = w$	$p_4 = 0$
$W_2(p_3)$:	$p_3 = w$	$p_3 = 1$
$W_3(p_1, p_2)$:	$p_1 \vee p_2 = w$	$p_1 + p_2 + p_1 p_2 = 1$
$W_4(p_2, p_5)$:	$\neg(\neg p_2 \wedge \neg p_5) = w$	$(p_2 + 1)(p_5 + 1) = 0$
$A(p_2)$:	$\neg p_2 = w$	$p_2 = 0$
	———	———
$K_1(p_4)$:	$\neg p_4 = w$	$p_4 = 0$
$K_2(p_3)$:	$p_3 = w$	$p_3 = 1$
$K_3(p_2)$:	$\neg p_2 = w$	$p_2 = 0$
$K_4(p_1)$:	$p_1 = w$	$p_1 = 1$
$K_5(p_5)$:	$p_5 = w$	$p_5 = 1$

Wenn man $p_2 = 0$ behauptet, dann stillschweigend auch $p_1 = p_5 = 1$. Ist man etwa mit $p_5 = 1$ nicht einverstanden, darf man $p_2 = 0$ (oder eine andere Prämisse) nicht behaupten.

Allgemeine Formulierung der Problematik:

Wenn man behauptet, die Annahmen A würden gelten, so heißt das so viel wie: sie sind mit in die Wissensbasis aufzunehmen.

Damit ergibt sich gemäß Streitfrage 1 ein neues Gleichungssystem

$$\frac{W_{alt} + A}{W_{neu}}$$

A sind also nicht bloß neue Behauptungen, sie verändern auch die Struktur der alten Wissensbasis.

5. Anmerkung zum Münchhausen Trilemma

Wissenschaftlichkeit zeichnet sich unter anderem dadurch aus, daß Behauptungen begründet werden müssen. Unter dem Namen ‚Münchhausen Trilemma' hat jedoch Hans Albert einen Einwand formuliert, der die Möglichkeit einer durchgängigen Begründung bestreitet.

Münchhausen Trilemma

» Wenn man für *alles* eine Begründung verlangt, muß man auch für die Erkenntnisse, auf die man jeweils die zu begründende Auffassung - bzw. auf die betreffende Aussagen-Menge - zurückgeführt hat, wieder eine Begründung verlangen. Das führt zu einer Situation mit drei Alternativen, die alle drei unakzeptabel erscheinen, also zu einem Trilemma. ... Man hat hier offenbar nämlich nur die Wahl zwischen:

Münchhausen Trilemma

» Wenn man für *alles* eine Begründung verlangt, muß man auch für die Erkenntnisse, auf die man jeweils die zu begründende Auffassung - bzw. auf die betreffende Aussagen-Menge - zurückgeführt hat, wieder eine Begründung verlangen. Das führt zu einer Situation mit drei Alternativen, die alle drei unakzeptabel erscheinen, also zu einem Trilemma. ... Man hat hier offenbar nämlich nur die Wahl zwischen:

- einem *infiniten Regreß*, der durch die Notwendigkeit gegeben erscheint, in der Suche nach Gründen immer weiter zurückzugehen, der aber praktisch nicht durchzuführen ist und daher keine sichere Grundlage liefert;

Münchhausen Trilemma

» Wenn man für *alles* eine Begründung verlangt, muß man auch für die Erkenntnisse, auf die man jeweils die zu begründende Auffassung - bzw. auf die betreffende Aussagen-Menge - zurückgeführt hat, wieder eine Begründung verlangen. Das führt zu einer Situation mit drei Alternativen, die alle drei unakzeptabel erscheinen, also zu einem Trilemma. ... Man hat hier offenbar nämlich nur die Wahl zwischen:

- einem *infiniten Regreß*, der durch die Notwendigkeit gegeben erscheint, in der Suche nach Gründen immer weiter zurückzugehen, der aber praktisch nicht durchzuführen ist und daher keine sichere Grundlage liefert;
- einem *logischen Zirkel* in der Deduktion, der dadurch entsteht, daß man im Begründungsverfahren auf Aussagen zurückgreift, die vorher schon als begründungsbedürftig aufgetreten waren, und der ebenfalls zu keiner sicheren Grundlage führt; und schließlich:

Münchhausen Trilemma

» Wenn man für *alles* eine Begründung verlangt, muß man auch für die Erkenntnisse, auf die man jeweils die zu begründende Auffassung - bzw. auf die betreffende Aussagen-Menge - zurückgeführt hat, wieder eine Begründung verlangen. Das führt zu einer Situation mit drei Alternativen, die alle drei unakzeptabel erscheinen, also zu einem Trilemma. ... Man hat hier offenbar nämlich nur die Wahl zwischen:

- einem *infiniten Regreß*, der durch die Notwendigkeit gegeben erscheint, in der Suche nach Gründen immer weiter zurückzugehen, der aber praktisch nicht durchzuführen ist und daher keine sichere Grundlage liefert;
- einem *logischen Zirkel* in der Deduktion, der dadurch entsteht, daß man im Begründungsverfahren auf Aussagen zurückgreift, die vorher schon als begründungsbedürftig aufgetreten waren, und der ebenfalls zu keiner sicheren Grundlage führt; und schließlich:
- einem *Abbruch des Verfahrens* an einem bestimmten Punkt, der zwar prinzipiell durchführbar erscheint, aber eine willkürliche Suspendierung des Prinzips der zureichenden Begründung involvieren würde.«

Nach Albert bestehen Begründungen in einer Abfolge von einzelnen Begründungsschritten: aus Voraussetzungen folgt eine Behauptungen; im nächsten Schritt müssen die Voraussetzungen begründet werden usw.

Stillschweigende Annahme:

Die Begründung von Wissen setzt Wissen voraus, das nicht mit in die Begründung eingeht.

Bei der Lösung eines Gleichungssystems gehen jedoch alle Gleichungen gleichzeitig ein:

- Die Begründung folgt in einem Schritt
- Es gibt kein Anfangsproblem.

Konsequenz

Das Münchhausen Trilemma beruht auf einer ganz speziellen Schlußform und ist daher nicht stichhaltig.

6. Anmerkung zum Unentscheidbarkeits- und Unvollständigkeitssatz

Die Verwirklichung des Calculemus-Gedankens wird oft pauschal bestritten mit dem Hinweis auf die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik und dem Unvollständigkeitssatz von Gödel.

Gegeben sei eine Wissensbasis in Form eines Gleichungssystems, das neben aussagenlogischen auch prädikatenlogische Formeln enthalten kann.

Da unser Wissen endlich ist, besteht das Gleichungssystem auch nur aus endlich vielen Gleichungen.

Stillschweigende Behauptungen:

(1) Die Prädikatenlogik ist ein notwendiges Darstellungsmittel für Wissen.

(2) Ein System mit endlichen vielen aussagen/prädikatenlogischen Gleichungen ist unlösbar,

Stillschweigende Behauptungen:

(1) Die Prädikatenlogik ist ein notwendiges Darstellungsmittel für Wissen.

(2) Ein System mit endlichen vielen aussagen/prädikatenlogischen Gleichungen ist unlösbar,

- denn es gibt keinen Algorithmus, mit dem für jede beliebige prädikatenlogische Formel in einer Abfolge von endlich vielen Schritten entschieden werden kann, ob sie allgemeingültig ist oder nicht

Stillschweigende Behauptungen:

(1) Die Prädikatenlogik ist ein notwendiges Darstellungsmittel für Wissen.

(2) Ein System mit endlichen vielen aussagen/prädikatenlogischen Gleichungen ist unlösbar,

- denn es gibt keinen Algorithmus, mit dem für jede beliebige prädikatenlogische Formel in einer Abfolge von endlich vielen Schritten entschieden werden kann, ob sie allgemeingültig ist oder nicht
- denn jede hinreichend ausdrucksstarke widerspruchsfreie Theorie mit rekursiv axiomatisierbarer Satzmenge ist unvollständig.

Konsequenz:

Um den Einwand aufrecht zu erhalten, muß man zuvor die stillschweigenden Behauptungen beweisen.

Das wird nicht leicht fallen, wird doch indirekt behauptet, ein endliches Gleichungssystem sei nicht entscheidbar.

Das eine hat offenbar mit dem anderen nichts zu tun.

7. Schlußbemerkung

Am Beispiel der Aussagenlogik konnte gezeigt werden, daß sich der Calculemus-Gedanke „Schlußfolgern und Rechnen wird dasselbe sein“ uneingeschränkt verwirklichen läßt.

Der Gedanke, inhaltliche Fragen rechnerisch zu entscheiden, läßt sich jedoch mit jedem dafür geeigneten mathematischen Verfahren umsetzen.

In der Physik sind bei allen Entscheidungen maßgeblich Berechnungen beteiligt und in der Technik führt man im großen Stil Simulationen auf dem Rechner durch, um technisches Verhalten vorauszuberechnen.

In der Philosophie klammert man sich dagegen immer noch an einige metamathematische Sätze, um die Behauptung aufrecht zu erhalten, der Calculemus-Gedanke sei undurchführbar, als sei es vordringliches Anliegen von Leibniz gewesen, metamathematische Probleme zu klären.

Diese Sätze sagen etwas über formale Systeme aus, also etwas über das Sprachmedium, aber nichts über den mit ihnen beschriebenen Inhalt, um den es Leibniz vor allem ging.

Auch jede umgangssprachliche Grammatik ist offenbar unentscheidbar, woraus man nach obigem Verständnis jedem von ihrem Gebrauch abraten müßte.

Es liegt offenbar eine Vermengung ganz unterschiedlicher Ebenen vor:

- Die Sprachebene, auf der Aussagen über die Sprache gemacht werden.
- Die inhaltliche Ebene, auf der mit einer Sprache inhaltlich bestimmte Operationen durchgeführt werden.

Ausblick

Im Umkreis der Wissensdarstellung gibt es noch viele ungelöste Probleme sprachtheoretischer, erkenntnis- und wissenschaftstheoretischer Natur.

Statt auf überkommene es-geht-nicht- Behauptungen zu bauen, wäre es fruchtbarer, sich der Lösung dieser Probleme zu widmen.

… ich halte dafür, daß man erst dann die Sache … vollkommen versteht, wenn man alles, was man behauptet, beweisen kann. Ich weiß, daß die breite Masse an diesen Forschungen keinen Gefallen findet; ich weiß aber auch, daß die breite Masse sich kaum die Mühe macht, die Dinge von Grund auf zu verstehen (Leibniz).

E. u. O. J.